

Forschungsseminar über ausgewählte
Themen der Plasmaphysik

Plasma-Pinche

Sören Klose
6. Februar 1996

1. Einordnung
2. MHD-Formulierung
3. Z-Pinch
4. Θ -Pinch
5. EM-Stoßwellenrohre
6. Plasmafokus

Literatur

1. Einordnung

Was ist ein Plasma-Pinch?

pinch=kneifen

- Kompression eines Plasmas durch ein starkes Magnetfeld
(Lorentzkraft)

Plasmaeinschlußverfahren:

- Schwerkraft (Sterne)
- Trägheitskraft (Laserfusion, H-Bombe)
- Magnetfelder

Magnetische Einschlußverfahren:

- Pinche
 - lineare
 - * z
 - * θ
 - * Screw= $z + \theta$
 - * Induktions Stoßwellenrohr
 - * Plasmafokus
 - toroidale
 - * z
 - * θ
 - * Screw
 - * Belt
 - * Reversed Field
- Fallen
 - lineare
 - * Spiegelmaschine
 - * Cusp
 - toroidale
 - * axialsymmetrische
 - Tokamak
 - Spheromak
 - * nicht axialsymmetrische
 - Stellerator
 - M+S
 - ...

2. MHD-Formulierung

Näherungen (ideales Plasma):

- keine Viskosität
- keine Wärmeleitung
- unendliche elektrische Leitfähigkeit

EULERSche-Gleichung mit **LORENTZkraftdichte**:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

Im **statischen Gleichgewicht** (Magnetohydrostatik-MHS) gilt:

$$0 = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

Maxwell:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} & ; \dot{D} = 0 & \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Strom wechselwirkt mit dem von ihm **selbst** erzeugten Magnetfeld \vec{B} :

$$0 = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}$$

Es gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} = -\nabla \frac{B^2}{2} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Daraus erhält man die **Druckgleichung der MHS**:

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

kinet. Druck + magnet. Druck = magnet. Spannung

Es existiert eine formale Analogie zur **stationären Strömung** eines Gases in der **Hydrodynamik**:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\nabla p \\ \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} &= -\nabla p \end{aligned}$$

Mit dem Übergang:

$$\begin{aligned} p &\longrightarrow p + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ \sqrt{\rho}\vec{v} &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\vec{B} \end{aligned}$$

⇒ **Äquivalenztheorem** von SCHLÜTER und GRAD:
 „Jede Lösung eines stationären inkompressiblen Strömungsproblems der gewöhnlichen Aerodynamik liefert die Lösung eines magnetohydrostatischen Problems ...”

Kraftfreie Felder:

Es gilt:

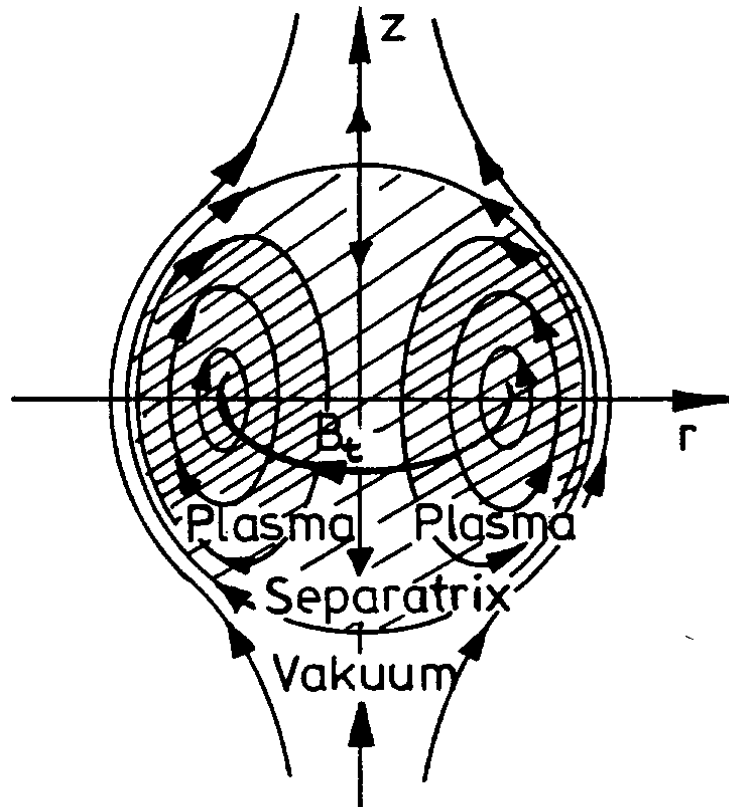
$$\text{rot } \vec{B} \times \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \vec{B} \parallel \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \vec{B} = \alpha \vec{B}$$

Es existieren *nichttriviale* Lösungen der allgemeinen Form:

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_t \quad (\text{p=poloidal, t=toroidal})$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} &= \operatorname{rot} (\vec{B}_p + \vec{B}_t) \times (\vec{B}_p + \vec{B}_t) \\
 &= \alpha (\vec{B}_t + \vec{B}_p) \times (\vec{B}_p + \vec{B}_t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Beispiel:



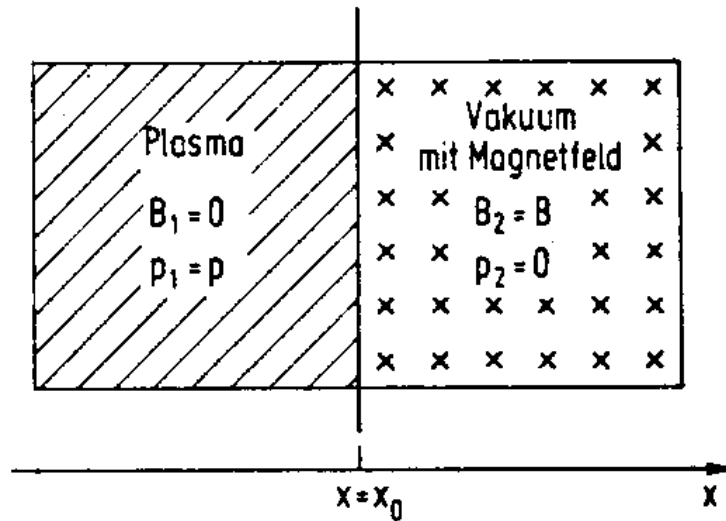
Die Spheromak-Konfiguration

Magnetischer Druck:

Für **gerade parallele** magnetische Feldlinien verschwindet der magnetische Spannungsterm:

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\underbrace{\mu_0}_{=0}} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\Rightarrow p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.}$$



Es gilt:

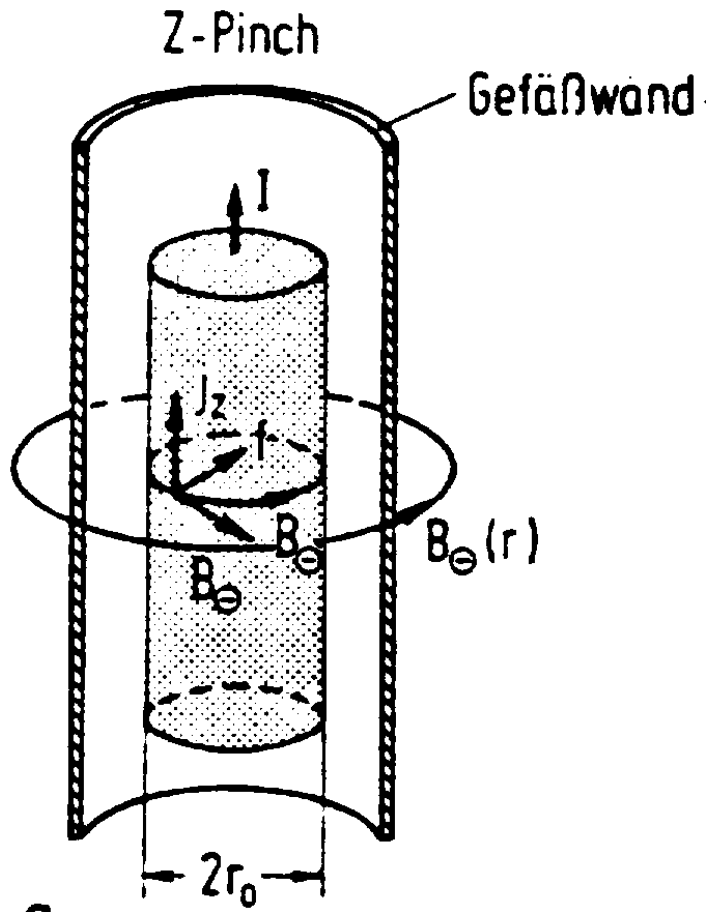
$$p_1 + \frac{B_1^2}{2\mu_0} = p_2 + \frac{B_2^2}{2\mu_0}$$

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Für $x = x_0$ wirkt das Magnetfeld auf das Plasma wie ein angrenzendes Medium mit dem **Druck** $p = B^2/2\mu_0$.

3. Z-Pinch

Im z-Pinch fließt ein **hoher zeitlich ansteigender Entladungsstrom in z-Richtung**. Er wird von außen über zwei Elektroden angelegt, oder auch induziert.



Druckgleichgewicht:

Bei Verwendung von *Zylinderkoordinaten* folgt:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dr} = -j_z B_\theta$$

oder:

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

Integration von $(\text{rot } \vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = \mu_0 j_z$ ergibt:

$$\text{Innen: } B_\theta = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi r_0^2} r$$

$$\text{Außen: } B_\theta = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi r}$$

Für den Druckverlauf im Plasma (Innen) folgt damit:

$$\frac{dp}{dr} = -j_z \frac{\mu_0 I_z}{2\pi r_0^2} r = -\frac{1}{2} \mu_0 j_z^2 r$$

$$\Rightarrow p(r) = -\frac{1}{4} \mu_0 j_z^2 r^2 + \text{Const.}$$

Mit der Randbedingung, daß auf der Plasmaoberfläche der Druck verschwindet: $p(r = r_0) = 0$ (Gleichgewicht) folgt:

$$p(r) = \frac{\mu_0 j_z^2}{4} (r_0^2 - r^2)$$

Mit $p = nkT$ (ideales Gas) folgt:

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{\mu_0 j_z^2}{4kT} (r_0^2 - r^2)$$

Durch Integration über die Querschnittsfläche des Plasmas erhält man die Teilchenzahldichte/Länge des Plasmazylinders \bar{n} :

$$\bar{n} = 2\pi \int_{r=0}^{r_0} nr \, dr = \frac{\mu_0 I_z^2}{8\pi kT}$$

Dies ist die **BENNETT-Gleichung**:

$$I_z^2 = \frac{8\pi}{\mu_0} \bar{n} kT$$

Sie beschreibt den **Strom** I_z der notwendig ist, um ein **Druckgleichgewicht** herzustellen (statischer Pinch).

$$I < I_{Bennett} : \textit{Expansion}$$

$$I = I_{Bennett} : \textit{Gleichgewicht}$$

$$I > I_{Bennett} : \textit{Kontraktion}$$

Beispiel:

$$T = 10^9 K \simeq 100 \textit{ keV}$$

$$r_0 = 15 \textit{ cm}$$

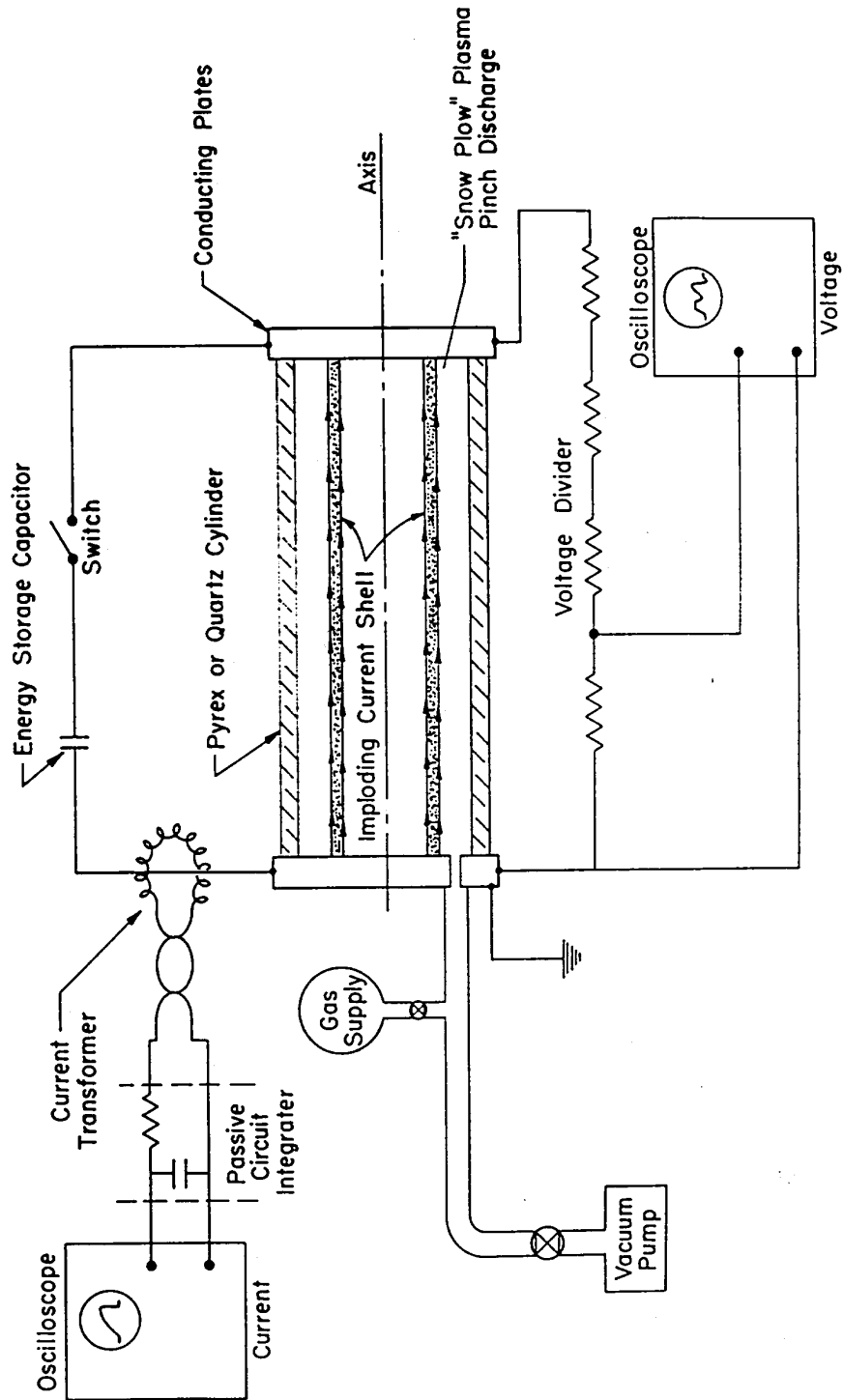
$$n_e = n_i = 10^{22} m^{-3}$$

$$I_z = 2.1 \cdot 10^7 A$$

$$B_\theta = 28.4 T$$

$$p = (n_e + n_i)kT = B_\theta^2/2\mu_0 = 3200 \textit{ atm} = 3.2 \cdot 10^8 Pa$$

Schneepflug-Modell:



Schematic of a dynamic-pinch experiment showing method of measuring current and voltage associated with the discharge.

Skin-Effekt:

- Zeitlich schnell anwachsender Entladungsstrom induziert ein zeitlich schnell anwachsendes Magnetfeld B_θ
- \dot{B}_θ erzeugt selbst wieder einen E -Wirbel
- E -Wirbel ist so gerichtet, daß er das von außen angelegte E -Feld im Leiterinnenbereich mehr schwächt als weiter außen
- Entladungsstrom wird nach außen gedrängt und fließt nur auf einer dünnen Oberflächenschicht des Plasmas
- Das Plasmainnere ist somit strom- und magnetfeldfrei \Leftrightarrow **Skin-Effekt**.

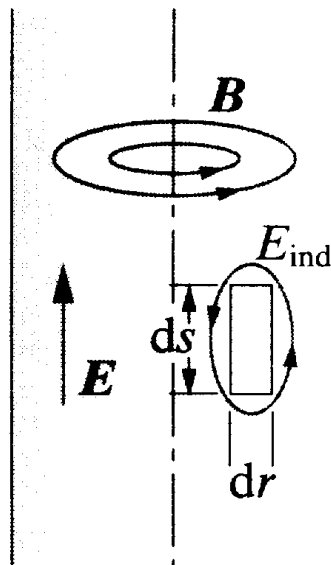


Abb. 7.126. Skineffekt

Der **magnetische Gesamtdruck** auf der Plasmaober-

fläche ($r = r_0$) ist:

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

Integration über den Außenbereich ($B_\theta = \mu_0 I_z / 2\pi r$) ergibt:

$$p(r = r_0) = -\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \int_{r=r_0}^{\infty} \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = -\frac{\mu_0 I_z^2}{4\pi^2 r_0^2} = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0}$$

- Die **magnetische Spannung** trägt also gerade zur **Hälfte** zum magnetischen Gesamtdruck bei.
- Der Druck im Plasmainneren ist gleich dem kinetischen Druck und ist konstant, da kein Strom und kein Magnetfeld vorhanden ist, und somit keine **LORENTZ**kraft wirken kann.
- Somit schiebt die Plasmaoberfläche das innere Plasma vor-sichher (Schneepflug).

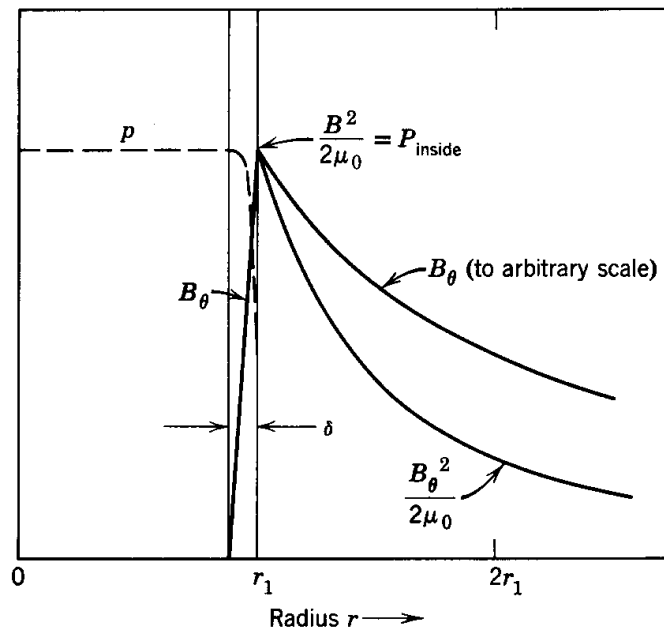
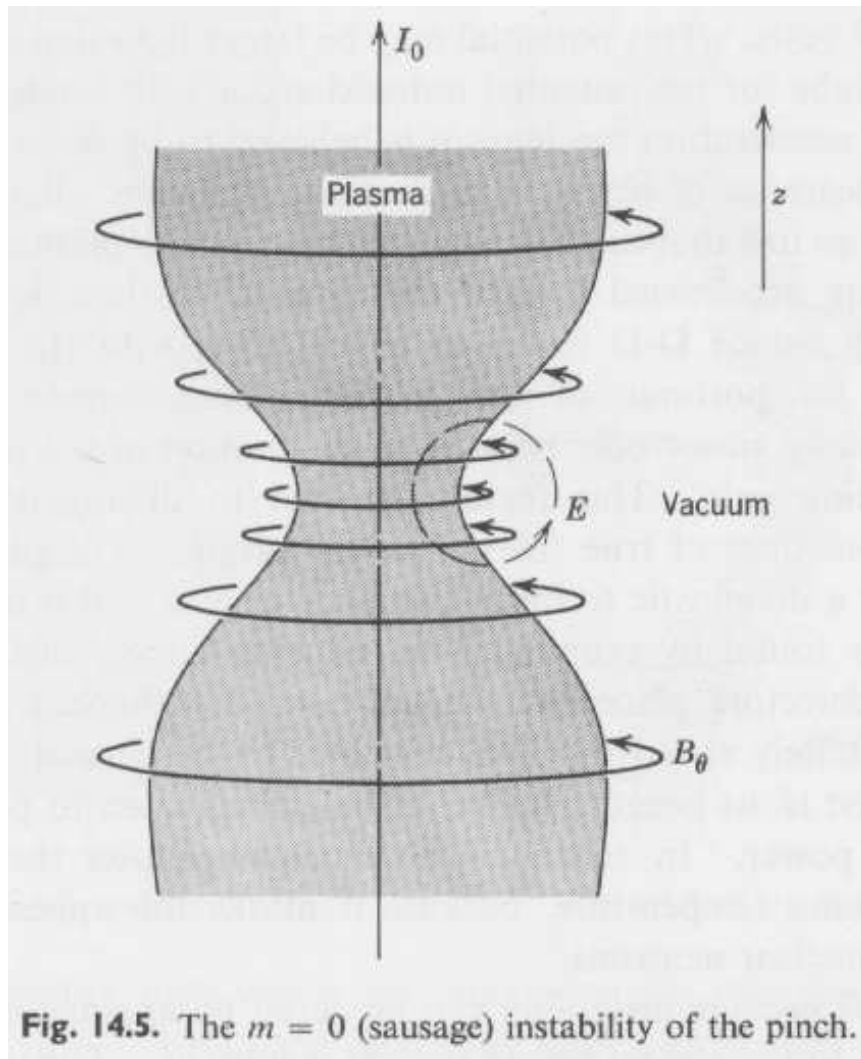


Fig. 14.3. Variation of magnetic field B and pressure p for a simple pinch with current sheet of thickness δ at $r = r_1$.

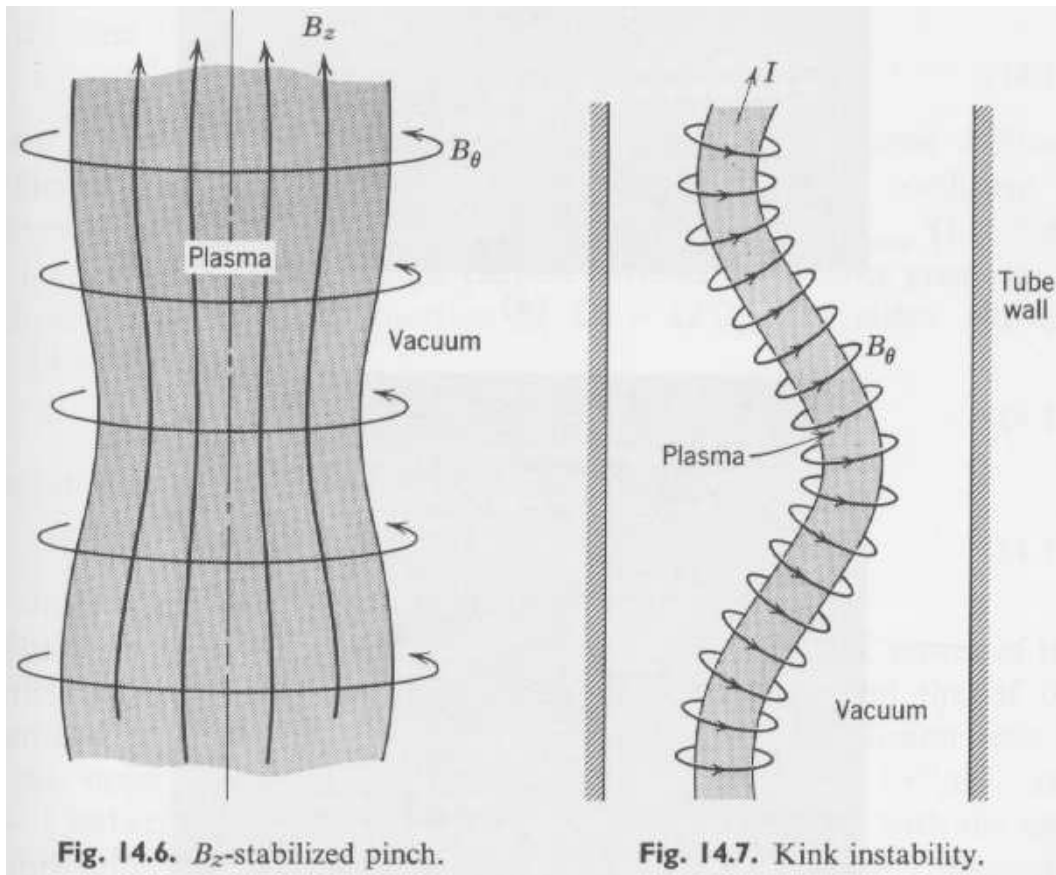
Istabilitätsmechanismen beim z-Pinch:

- Die Existenz einer MHS-Gleichgewichtslösung für den z-Pinch (BENNETT-Gleichung) ist eine **notwendige**, aber **keine hinreichende** Bedingung für seine Stabilität
- Es muß ein **stabiles Gleichgewicht** vorliegen
- Kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage dürfen zeitlich nicht weiter anwachsen, sondern sollten sich kompensieren.

- Das z-Pinch Gleichgewicht ist aber **instabil** (theoretische Vorhersage von KRUSKAL und SCHWARZSCHILD)
- Aus einer Fourieranalyse der Störungen erhält man zwei besonders rasch anwachsende Moden. Die **m=0-Mode (sausage)** und die **m=1-Mode (kink)** (m kennzeichnet die Anzahl der Wellen auf dem Umfang des zylindrischen Plasmas)



- An der Stelle der Einschnürung steigt der magnetische Druck $p = B_\theta^2/2\mu_0$ an, wodurch sich das Plasma noch mehr verengt
- Die $m=0$ -Instabilität läßt sich **verhindern** durch anlegen eines Magnetfeldes in z -Richtung
- Dieses erzeugt bei Einschnürung des Plasmas einen großen **magnetischen Gegendruck**.



- Die Ursache der $m=1$ -Instabilität ist ebenfalls der wachsende und sich verstärkende magnetische Druck an der Stelle der Deformation
- Anlegen eines B_z -Feldes verhindert zwar etwas diese Instabilität (magnetische Spannung der Feldlinien), aber nicht ausreichend genug
- Der z -Pinch **zerfällt** innerhalb weniger μs .

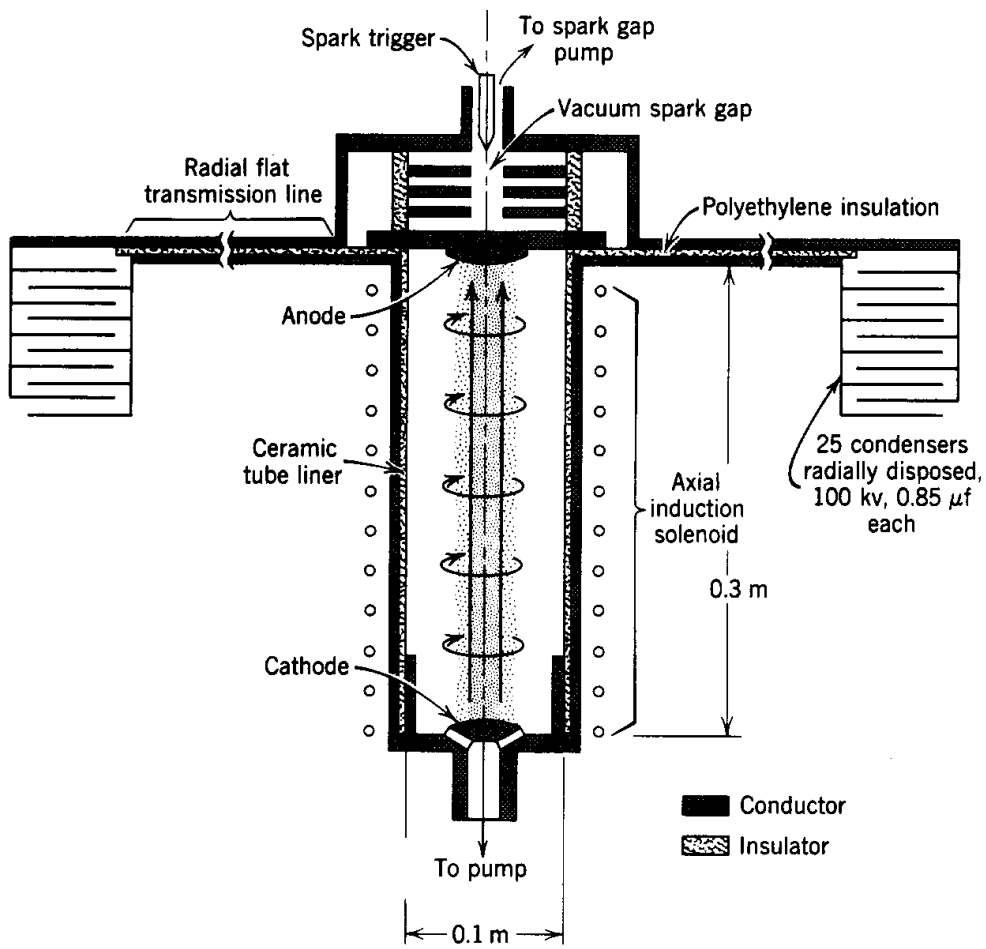


Fig. 14.11. Schematic arrangement of a typical straight pinch experiment (Columbus II). The tube is approximately to scale, but the condensers are actually about 0.4-m diam and 1-m high. After J. L. Tuck.¹⁰

4. θ -Pinch

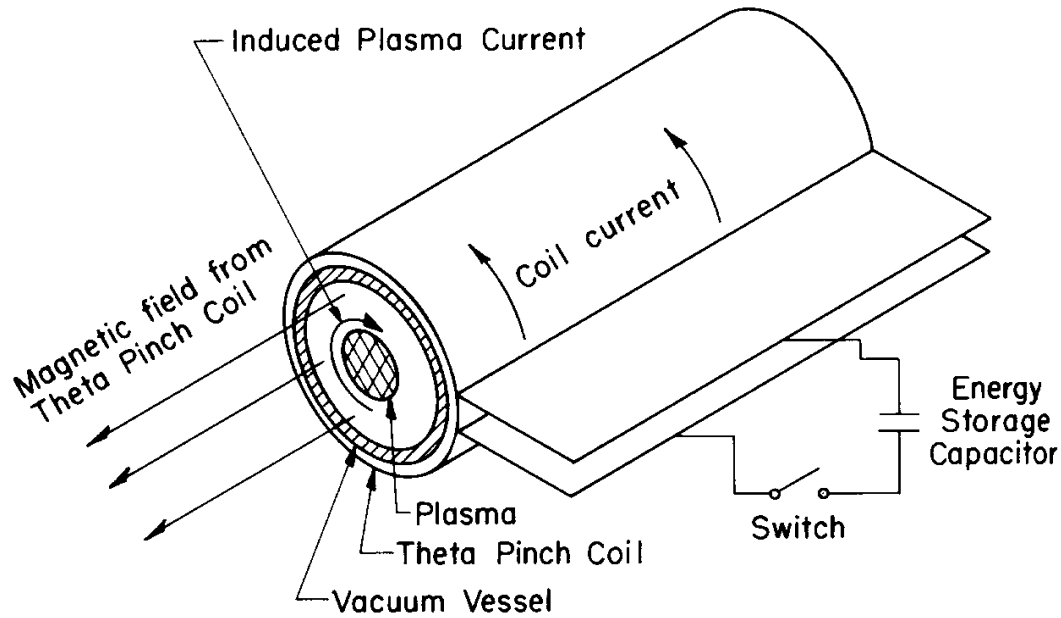


FIGURE 3.11.2
Schematic of θ dynamic pinch.

Druckgleichgewicht:

Bei unendlicher elektrischer Leitfähigkeit folgt für den im Plasma **induzierten Strom**:

$$\begin{aligned} I_{\theta_{ind}} &= -I_{\theta} \\ B_{z_{ind}} &= -B_z \end{aligned}$$

Es wird ein gleichgroßes aber **entgegengesetztes** Magnetfeld induziert. Das **resultierende Magnetfeld im Plasma ist Null**. Das äußere kann nicht eindringen.

$$\begin{aligned} \text{Innen (Plasma): } B &= B_z + B_{z_{ind}} = 0 \\ \text{Außen (Vakuum): } B &= B_z \end{aligned}$$

Der induzierte Strom $I_{\theta_{ind}}$ fließt nur auf der **Plasmaoberfläche**.

Das Magnetfeld im **Inneren** einer **langen zylindrischen Spule** ist:

$$B_z = \mu_0 \frac{NI_\theta}{l}$$

($N = 1$ Anzahl der Windungen, l Spulenlänge)

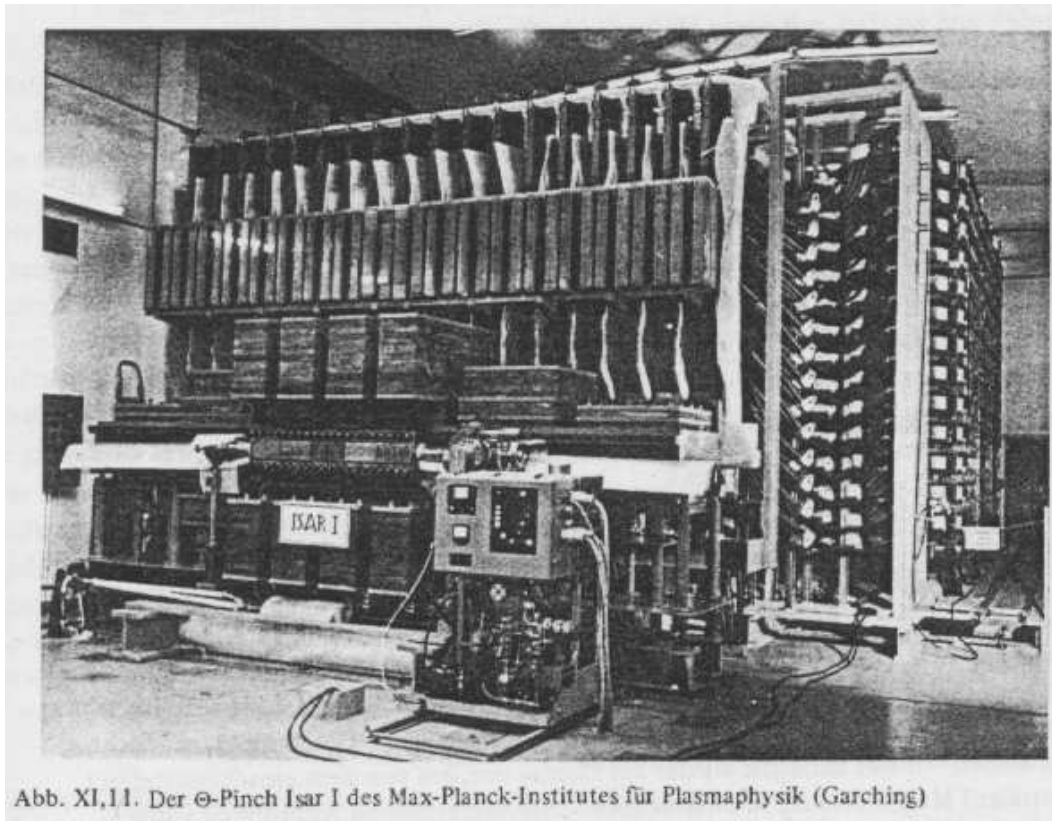
An der Plasmaoberfläche muß der kinetische Druck gleich dem magnetischen Druck sein (Gleichgewicht):

$$p = nkT = \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I_\theta^2}{2l^2}$$

(Die magnetische Spannung von B_z ist Null.) Damit ergibt sich für den **Spulenstrom**:

$$I_\theta^2 = \frac{2nkTl^2}{\mu_0}$$

- Der Druck im Plasma hängt, im Gegensatz zum z-Pinch, nicht vom Radius r ab, er ist konstant.
- Der θ -Pinch befindet sich in einem **indifferenten** Gleichgewicht. Dadurch erreichte er für die Fusionsforschung eine größere Bedeutung als der z-Pinch.
- Anfang der 70-iger Jahre gab es am IPP in Garching u.a. den θ -Pinch **ISAR I**. Mit ihm wurden Plasmen bis zu Temperaturen von $6 \cdot 10^7 K$ und Dichten von $10^{22} m^{-3}$ erzeugt.



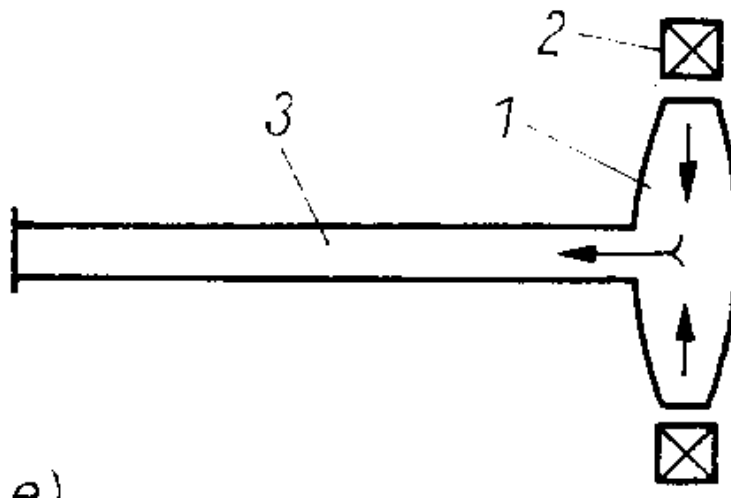
- Wie sich zeigte, sind **lineare** Anordnungen aufgrund des schnellen **Teilchenverlustes an den Enden** nicht geeignet ein Fusionsplasma über längere Zeiträume stabil einzuschließen (Isar I: $n\tau \simeq 10^{17}m^{-3}s \ll (n\tau)_{Lawson} \simeq 2 \cdot 10^{20}m^{-3}s$).

5. EM-Stoßwellenrohre

- Durch **Stoßwellen** kann man Gase sehr stark **komprimieren** und **heizen**, so daß ein Plasma entsteht
- Es gibt verschiedene Ausführungen von **elektromagnetischen** Stoßwellenrohren
- Meißt haben sie eine **T-Form** (T-Rohr)

Induktions-Stoßwellenrohr:

- Erzeugung einer magnetischen Druckwelle
- Dadurch Kompression des Plasmas
- Es werden aber auch Ströme induziert, die das Plasma OHMSch heizen und LORENTZkräfte bewirken



- 1 - Entladungskammer
- 2 - Stoßspulen für Magnetfeld
- 3 - Kompressions- und Beobachtungsraum

Entladungs-Stoßwellenrohr:

- Es wird eine stromstarke Kurzzeitentladung gezündet (einige 100 kA für einige $0.1 \mu s$)
- Durch die schnelle OHMSche Aufheizung des Plasmas entsteht eine Druckwelle, die sich entlang des T-Rohres ausbreitet und das Untersuchungsgas heizt.

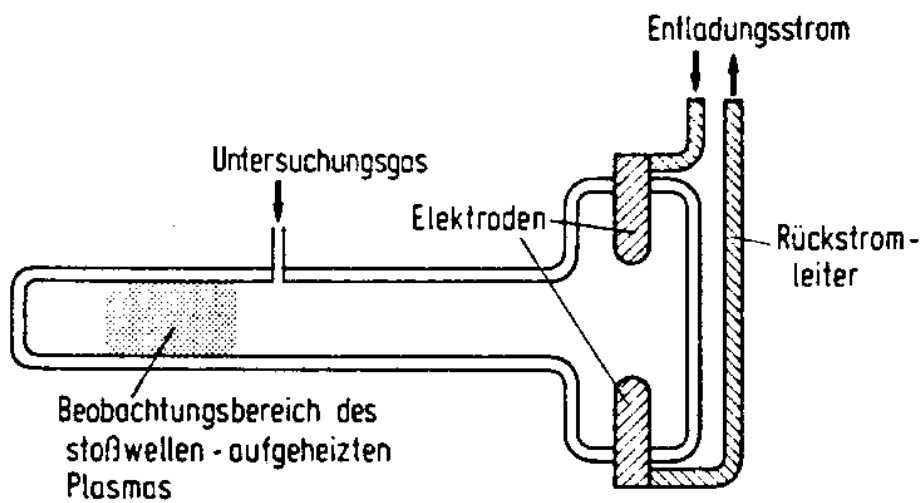
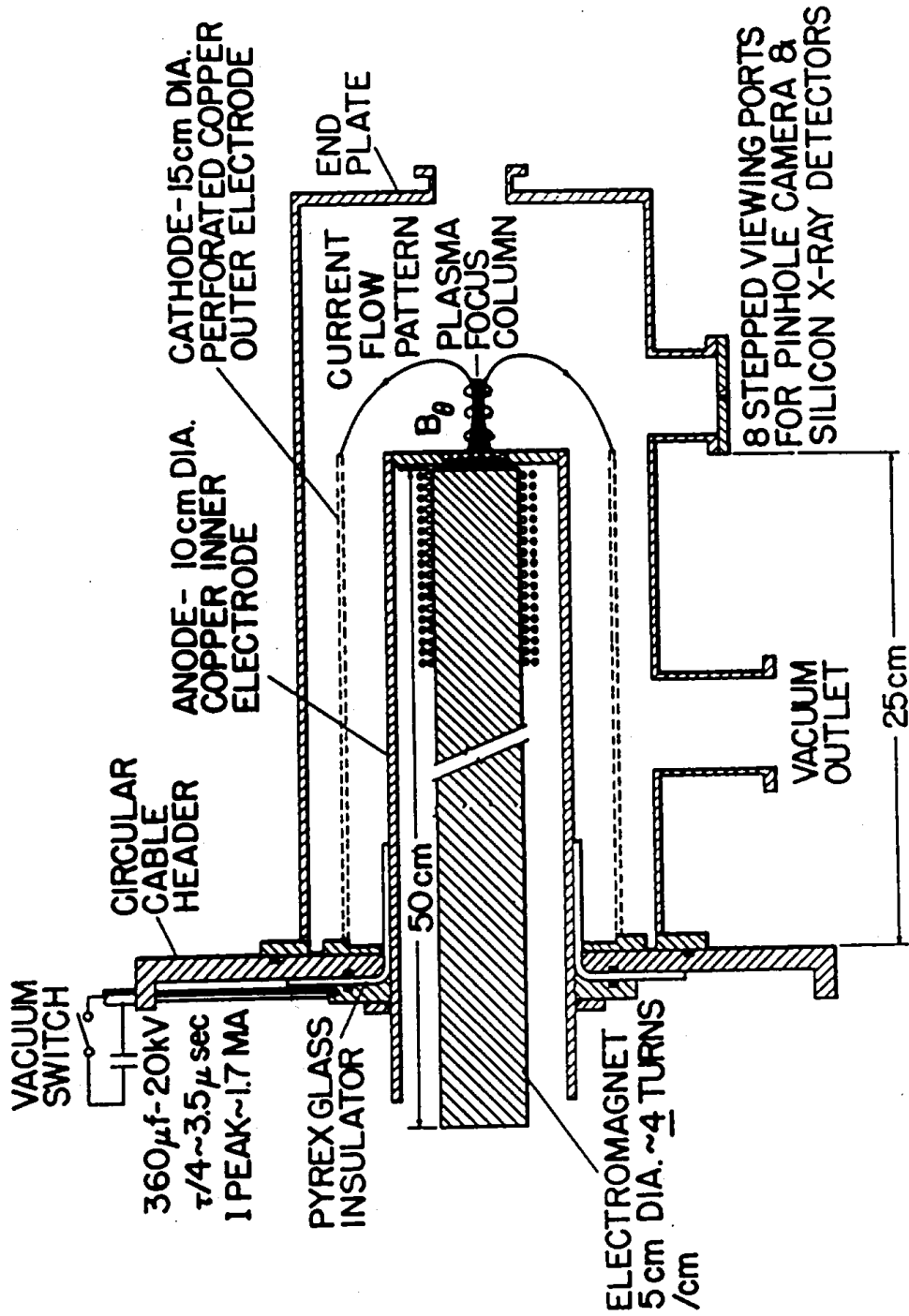


Abb. X,22. Stoßrohr zum Erzeugen elektromagnetischer Stoßwellen.

6. Plasmafokus



Schematic of dense-plasma-focus experiment used at Los Alamos Scientific Laboratories to study properties of high-energy density plasmas. [After J. W. Mather, through the courtesy of the Los Alamos Scientific Laboratories, Los Alamos, New Mexico, and the U.S. Atomic Energy Commission, under whose auspices the work was performed.]

Funktion:

- Ringscheibenförmige Bogenentladung zwischen Kathode und Anode
- Expansion Richtung Ausgang
- Fokussierung durch Magnetfeld (**LORENTZ**kraft)

Parameter:

- Fokusbereich $\simeq 100 \mu m$
- Fokusslänge mehrere $100 \mu m$ (strichförmig)
- Strompuls $\simeq 200 kA$
- Energien der Ionen bis $\simeq 1 MeV$

Literatur

- [1] Cap, Ferdinand: *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*, Springer-Verlag, 1994
- [2] Rose, David J., Clark, Melville Jr.: *Plasmas and Controlled Fusion*, M.I.T.-Press, John Wiley and Sons, 1961
- [3] Rutscher, Alfred: *Wissensspeicher Plasmatechnik*, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1983
- [4] Schumacher, Uwe: *Fusionsforschung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1993
- [5] Krall, Nicholas A., Trivelpiece, Alvin W.: *Principles of Plasma Physics*, San Francisco Press, Inc., 1986
- [6] Bergmann, Schäfer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band 4, (B. Wende: Das Plasma, G. Lehner: Fusionsexperimente)
- [7] Vogel, H.: *Gerthsen Physik*, Springer, 1995
- [8] Fußmann, Gerd: *Vorlesungsskripte 1-3*, Humbolt Universität Berlin